Opción A

1..-Estudiar la derivabilidad de la siguiente función en todo su dominio, dando expresiones de la derivada donde exista $f(x)=\begin{cases} sen\,2x+\frac{1}{3}\cdot e^{-2x} & si \quad x\le 0 \\ \frac{x+1}{3}+ln(x+1) & si \quad 0<x<2 \\ \sqrt{x^2-2x} & si \quad x\ge 2 \end{cases}$ **[2'5 puntos]**

Primero habrá que analizar si es continua en todo el recorrido, porque si no hay continuidad en alguno de los puntos de discontinuidad no es derivable en ese punto

$$\begin{cases} \begin{cases} f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=sen\,2\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot e^{-2\cdot 0}=sen\,0+\frac{1}{3}\cdot e^{0}=0+\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\frac{0+1}{3}+ln(0+1)=\frac{1}{3}+ln1=\frac{1}{3}+0=\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow Es\ continua\ en\ x=0 \\ \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\frac{2+1}{3}+ln(2+1)=1+ln3 \\ f(2)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\sqrt{2^2-2\cdot 2}=0 \end{cases} \Rightarrow 1+ln3\ne 0 \Rightarrow No\ es\ continua\ en\ x=2 \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2\cos 2x-\frac{2}{3}\cdot e^{-2x} & si \quad x<0 \\ \frac{1}{3}+\frac{1}{x+1} & si \quad 0<x<2 \\ \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}} & si \quad x>2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=2\cos 2\cdot 0-\frac{2}{3}\cdot e^{-2\cdot 0}=2\cos 0-\frac{2}{3}\cdot e^{\cdot 0}=2\cdot 1-\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{4}{3} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\frac{1}{3}+\frac{1}{0+1}=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow Es\ derivable\ en\ x=0 \\ \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f'(x)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3} \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f'(x)=\frac{2-1}{\sqrt{2^2-2\cdot 2}}=\frac{1}{0} \end{cases} \Rightarrow No\ es\ derivable\ en\ x=2\ por\ no\ ser\ continua \end{cases}$$

2.- Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima situado en el primer cuadrante, que tenga un vértice en el origen de coordenadas, un vértice sobre el eje **OX**, otro sobre el eje **OY** y otro sobre la recta de ecuación **4x + 3y = 12** **[2'5 puntos]**

$$\begin{cases} 4x=12-3y\Rightarrow x=3-\frac{3}{4}y \\ A=xy \end{cases} \Rightarrow A=\left(3-\frac{3}{4}y\right)y\Rightarrow A'=\frac{dA}{dy}=-\frac{3}{4}y+\left(3-\frac{3}{4}y\right)=3-\frac{6}{4}y\Rightarrow A'=0\Rightarrow$$

$$3-\frac{3}{2}y=0\Rightarrow \frac{3}{2}y=3\Rightarrow y=\frac{6}{3}=2\Rightarrow A''=\frac{d^2A}{dy^2}=-\frac{6}{4}<0\Rightarrow Máximo\Rightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=3-\frac{3}{4}\cdot 2=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2} \end{cases}$$

3.- Dado el sistema: $\begin{cases} 3x - ay = -3 \\ 2x + ay - 5z = 13 \\ x + 3y - 2z = 5 \end{cases}$

a) Estudiar su compatibilidad según los valores del parámetro **a [1’75 puntos]**
b) Resolverlo para **a = 9 [0’75 puntos]**

$a)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -a & 0 \\ 2 & a & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -6a + 5a + 45 - 4a = 45 - 5a \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow 45 - 5a = 0 \Rightarrow 5a = 45 \Rightarrow a = 9$$

$$(Para\ todo)\forall a \in \Re - \{9\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3 = Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sist.Compat.Determinado$$

$Si\ a = 9$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -9 & 0 & -3 \\ 2 & 9 & -5 & 13 \\ 1 & 3 & -2 & 5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -9 & 0 & -3 \\ -6 & -27 & 15 & -39 \\ -3 & -9 & 6 & -15 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -9 & 0 & -3 \\ 0 & -45 & 15 & -45 \\ 0 & -18 & 6 & -18 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -9 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -9 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$0z = 0 \Rightarrow z = \frac{0}{0} \Rightarrow Infinitas\ soluciones \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Indeterminado$$

$b)Si\ a = 9 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Indeterminado$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -9 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow -3y + z = -3 \Rightarrow z = -3 + 3y \Rightarrow 3x - 9y = -3 \Rightarrow 3x = -3 + 9y \Rightarrow x = -1 + 3y$$

$$Solución \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z) = (-1 + 3\lambda\ ,\ \lambda\ ,\ -3 + 3\lambda)$$

4.- Dado los puntos **A(-1 , 2 , 0)** y **B(2 , 1 , -1)**
a) Determinar si el punto **C(5 , 0 , -2)** está alineado con los anteriores, explicando el motivo (hacer un dibujo esquemático de la situación) **[0'75 puntos]**
b) Hallar las ecuaciones de la recta que contiene a los puntos **A** y **B**, en forma continua, en forma paramétrica y como intersección de dos planos **[1'25 puntos]**
c) Hallar la ecuación en forma general del plano que pasa por **B** y es perpendicular a la recta **AB [0'5 puntos]**

a) Si están alineados los tres puntos los vectores que forman **AB** y **AC** son iguales o proporcionales

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2\ ,1\ ,-1)-(-1\ ,2\ ,0)=(3\ ,-1\ ,-1) \\ \overrightarrow{AC} = (5\ ,0\ ,-2)-(-1\ ,2\ ,0)=(6\ ,-2\ ,-2) \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{6}=\frac{-1}{-2}=\frac{-1}{-2} \Rightarrow Estan\ alineados\ A,B\ y\ C$$

b)

$$Forma\ continua \Rightarrow r \equiv \frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{-1} \qquad Forma\ paramétrica \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=-1+3\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=-\lambda \end{cases}$$

$$Intersección\ de\ planos \Rightarrow \begin{cases} -x-1=3y-6 \\ -x-1=3z \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x+3y-5=0 \\ x+3z+1=0 \end{cases}$$

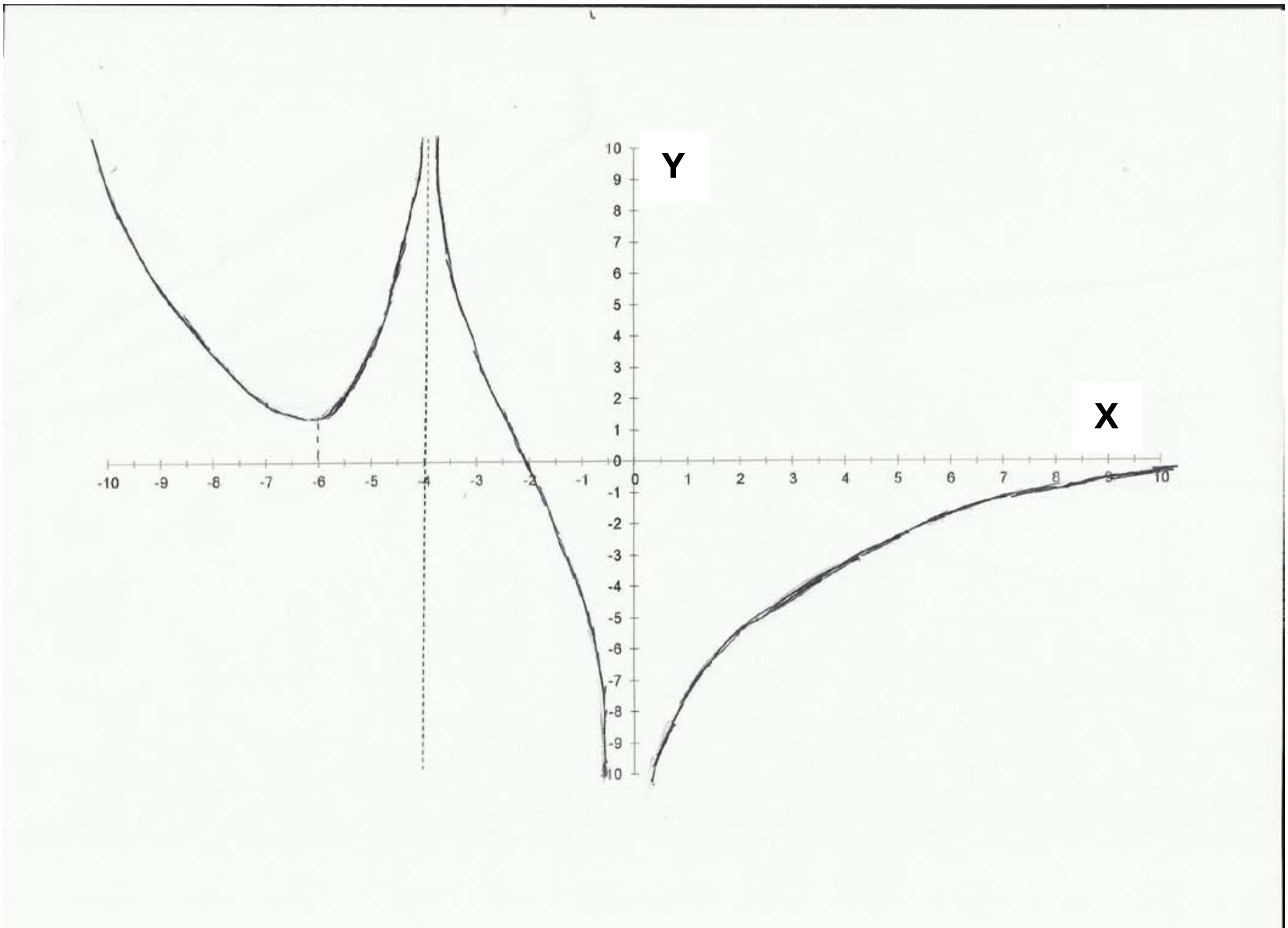
c) El vector director de la recta **r** (que pasa por **A** y **B**) es, al ser perpendicular al plano, el vector del plano π y este es perpendicular al vector **BG** siendo **G** el punto genérico del plano y por lo tanto el producto escalar de ambos es nulo y la ecuación pedida del plano

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{AB} = (3\ ,-1\ ,-1) \equiv (-3\ ,1\ ,1) \\ \overrightarrow{BG} = (x\ ,y\ ,z)-(2\ ,1\ ,-1)=(x+2\ ,y-1\ ,z+1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \perp \overrightarrow{BG} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \cdot \overrightarrow{BG} = 0$$

$$(-3\ ,1\ ,1)\cdot(x+2\ ,y-1\ ,z+1)=0 \Rightarrow -3\,(x+2)+y-1+z+1=0 \Rightarrow \pi \equiv 3x-y-z+6=0$$

Opción B

1..-Representar la gráfica de una función **f(x)** que tenga las siguientes propiedades:
a) Es continua en todos los reales salvo **– 4** y **0**
b) Tiene asíntotas verticales **x = - 4** y **x = 0**
c) Para $x \to +\infty$, se cumple **f(x) = 0**
d) Su función derivada es negativa en **(** $-\infty$ **, - 6)** y en **(-4 , 0)**, siendo positiva **(- 6 , - 4)**, y en **(0 ,** $+\infty$ **)**
[2.5 puntos]



2.- Se desea hacer una ventana con forma de triángulo rectángulo, de modo que el lado mayor sea de 2 metros ¿Cuáles deben de ser las dimensiones de los otros dos lados para que la ventana tenga área máxima? **[2'5 puntos]**

La hipotenusa mide **2 m.**, los catetos se denominaran **x** e **y**

$$\begin{cases} x^2+y^2=2^2 \Rightarrow y^2=4-x^2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{4-x^2} \Rightarrow \begin{cases} y=\sqrt{4-x^2} \\ y=-\sqrt{4-x^2} \Rightarrow No\ se\ toma\ por\ valor\ negativo \end{cases} \Rightarrow \\ A=\frac{1}{2}\,x\,y \end{cases}$$

$$A=\frac{1}{2}\,x\,\sqrt{4-x^2} \Rightarrow A'=\frac{dA}{dx}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{4-x^2}+\frac{(-2x)}{2\sqrt{4-x^2}}\,x\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{4-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}}\right)$$

$$A'=\frac{1}{2}\left(\frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}\right)=\frac{2}{2}\left(\frac{2-x^2}{\sqrt{4-x^2}}\right)=\frac{2-x^2}{\sqrt{4-x^2}} \Rightarrow A'=0 \Rightarrow \frac{2-x^2}{\sqrt{4-x^2}}=0 \Rightarrow 2-x^2=0 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow$$

$$x=\pm\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{2} \Rightarrow No\ se\ toma\ por\ valor\ negativo \end{cases} \Rightarrow$$

$$A''=\frac{d^2A}{dx^2}=\frac{-2x\,\sqrt{4-x^2}-\frac{(-2x)}{2\sqrt{4-x^2}}\left(2-x^2\right)}{4-x^2}=\frac{-2x\,\sqrt{4-x^2}+\frac{x\left(2-x^2\right)}{\sqrt{4-x^2}}}{4-x^2}=\frac{-2x\left(4-x^2\right)+x\left(2-x^2\right)}{\left(4-x^2\right)\sqrt{4-x^2}}$$

$$A''=\frac{-8x+2x^3+2x-x^3}{\left(4-x^2\right)\sqrt{4-x^2}}=\frac{x^3-6x}{\left(4-x^2\right)\sqrt{4-x^2}} \Rightarrow A''\left(\sqrt{2}\right)=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^3-6\left(\sqrt{2}\right)}{\left[4-\left(\sqrt{2}\right)^2\right]\sqrt{4-\left(\sqrt{2}\right)^2}}=\frac{2\left(\sqrt{2}\right)-6\left(\sqrt{2}\right)}{(4-2)\sqrt{4-2}}$$

$$A''\left(\sqrt{2}\right)=\frac{-4\left(\sqrt{2}\right)}{2\sqrt{2}}=-2<0 \Rightarrow Máximo \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{2}\ m. \\ y=\sqrt{4-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{4-2}=\sqrt{2}\ m. \end{cases}$$

Es un triángulo rectángulo isósceles

3.- Dada las matrices: $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 5\\ 3 & 2 & -2\\ 1 & 0 & 7\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 4\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix}$

a) Calcular la inversa de **A** paso a paso **[1'5 puntos]**
b) Resolver la ecuación **A . X = B + C** **[1 punto]**

a) Para que exista una inversa de una matriz su determinante debe de ser distinto de cero

$$|A|=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 3 & 0\end{vmatrix}=6-1-3=2\neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\left(adj\ A^{t}\right)\Rightarrow A^{t}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$adj\ A^{t}=\begin{pmatrix}3 & 3 & -1\\ -1 & -1 & 1\\ 5 & 3 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}3 & 3 & -1\\ -1 & -1 & 1\\ 5 & 3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$b)$

$$A^{-1}AX=A^{-1}(B+C)\Rightarrow IX=A^{-1}(B+C)\Rightarrow X=A^{-1}(B+C)$$

$$B+C=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 5\\ 3 & 2 & -2\\ 1 & 0 & 7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 4\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 6\\ 6 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow X=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}3 & 3 & -1\\ -1 & -1 & 1\\ 5 & 3 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 6\\ 6 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$X=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}17 & 5 & 20\\ -5 & -1 & -4\\ 17 & 7 & 32\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{17}{2} & \frac{5}{2} & 10\\ -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -2\\ \frac{17}{2} & \frac{7}{2} & 16\end{pmatrix}$$

4.- Dada la siguiente rectas $r:\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ x+y-2z=1 \end{cases}$ y el punto **P(-1 , 2 , 3)**

Hallar la ecuación en forma general del plano que las contiene **[2.5 puntos]**

Para obtener la ecuación del plano π tomaremos el vector director de la recta r, el vector que une uno cualquiera de sus puntos R (tomaremos el indicado en su ecuación) con el punto P y el vector formado por este y el punto G genérico del plano. Como estos tres vectores son coplanarios (están en el mismo plano) el vector PG es combinación lineal de los otros dos y, por ello, el determinante de la matriz que forman es nulo y la ecuación pedida

$$r:\begin{cases} 4x-6y+2z=0 \\ x+y-2z=1 \end{cases} \Rightarrow 5x-5y=1 \Rightarrow 5x=5y+1 \Rightarrow x=y+\frac{1}{5} \Rightarrow y+\frac{1}{5}+y-2z=1 \Rightarrow 2y-2z=1-\frac{1}{5}$$

$$2z=2y-\frac{4}{5} \Rightarrow z=y-\frac{2}{5} \Rightarrow r:\begin{cases} x=\frac{1}{5}+\lambda \\ y=\lambda \\ z=-\frac{2}{5}+\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(1,1,1) \\ R\left(\frac{1}{5},0,-\frac{2}{5}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(1,1,1) \\ \overrightarrow{PR}=\left(\frac{1}{5},0,-\frac{2}{5}\right)-(-1,2,3)=\left(\frac{6}{5},-2,-\frac{17}{5}\right)\equiv(6,-10,-17)\equiv(-6,10,17) \Rightarrow \\ \overrightarrow{PG}=(x,y,z)-(-1,2,3)=(x+1,y-2,z-3) \end{cases}$$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -6 & 10 & 17 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 17\,(x+1)-6\,(y-2)+10\,(z-3)+6\,(z-3)-10\,(x+1)-17\,(y-2)=0$$

$$7\,(x+1)-23\,(y-2)+16\,(z-3)=0 \Rightarrow \pi \equiv 7x-23y+16z+5=0$$